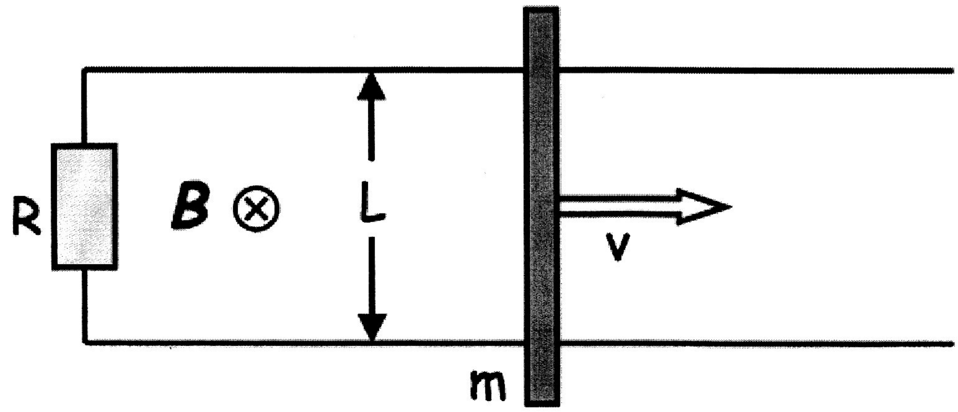
Tentamen Elektriciteit en Magnetisme 2

Dinsdag 28 oktober 2008, 9:00-12:00

Voordat je begint, lees het volgende:

- Er zijn 4 sommen met een totaal van 50 punten.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel papier.
- Begin elke som op een nieuw vel papier.
- Onleesbaar handschrift wordt fout gerekend.
- *Succes!*

Som 1 (*40 minuten; 12 punten totaal*)



Een metalen staaf met massa m glijdt zonder wrijving op twee parallelle geleidende rails die op een afstand L staan. De rails worden verbonden door een weerstand R. Het geheel staat in een uniform magnetisch veld $\vec{B}$ dat in de pagina wijst.

3 pnt (a) Geef de integraal-vorm van de wet van Faraday voor de emf. Als de staaf naar rechts beweegt met snelheid v, wat is dan de stroom door de weerstand? In welke richting gaat de stroom?

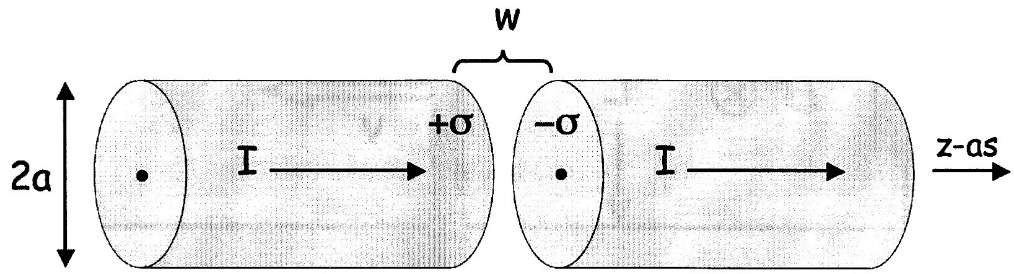
3 pnt (b) Wat is de magnetische kracht op de staaf? In welke richting?

3 pnt (c) Als de staaf begint met snelheid v_0 op tijd $t = 0$, en gaat glijden, wat is de snelheid op een later tijdstip t?

3 pnt (d) De kinetische energie van de staaf op $t = 0$ is $\frac{1}{2}mv_0^2$. Controleer dat de energie afgegeven aan de weerstand inderdaad precies $\frac{1}{2}mv_0^2$ is.

Som 2 (*40 minuten; 13 punten totaal*)

Door een dikke draad, met straal a, loopt een constante stroom I, uniform verdeeld over de doorsnede van de draad. Een nauwe spleet, met breedte $w \ll a$, vormt een condensator met parallelle platen; zie de Figuur. De condensator wordt opgeladen door de stroom. We gebruiken cylinder-coördinaten.



3 pnt (a) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ in de spleet, als functie van I, a en de tijd t. (Neem aan dat de lading Q nul is op $t = 0$, dus $Q(t) = It$.) Geef eerst de relatie tussen de oppervlakte-ladingsdichtheid $\pm\sigma$ en Q.

4 pnt (b) Bereken uit $\vec{E}$ het magnetische veld $\vec{B}$ in de spleet, als functie van de afstand s tot de as.

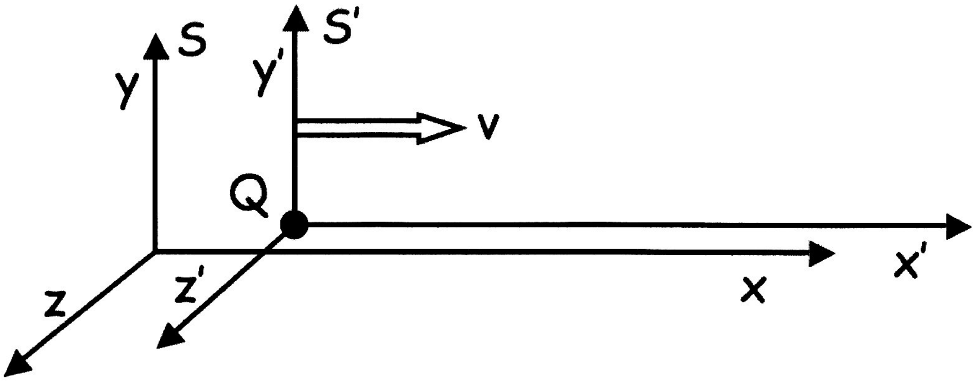
3 pnt (c) Bereken de energie-dichtheid u_{em} en de Poynting vector $\vec{S}$ in de spleet. Geef met name ook de *richting* van $\vec{S}$. Laat zien dat

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{em} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \; .$$

3 pnt (d) Bereken de totale energie in de spleet, als functie van de tijd. Bereken het totale vermogen dat de spleet instroomt, door de Poynting vector te integreren over de juiste oppervlakte. Laat zien dat dit gelijk is aan de toename van de energie in de spleet per tijdseenheid, ofwel dE/dt.

Som 3 (*40 minuten; 12 punten totaal*)

We willen de velden berekenen van een puntlading Q die beweegt met constante snelheid v langs de x-as van het laboratorium-systeem S. We beschouwen daarom ook het inertiaal-systeem S' dat met de lading meebeweegt; zie de Figuur.



3 pnt (a) Bekijk de vier-vector $x^\mu = (ct, \vec{r})$. Geef de Lorentz-transformatie die de coördinaten $(ct', \vec{r}')$ in S' uitdrukt in de coördinaten $(ct, \vec{r})$ in S. De scalaire en vector potentiaal vormen samen ook een vier-vector, de vier-potentiaal:

$$A^\mu = (V/c, \vec{A}) \; .$$

Geef de potentialen in systeem S' uitgedrukt in de potentialen in S.

3 pnt (b) In systeem S' is de lading in rust. Geef V' en $\vec{A}'$ uitgedrukt in $\vec{r}'$. Transformeer nu terug naar S. Geef eerst V en $\vec{A}$ uitgedrukt in $\vec{r}'$ en reken die daarna om naar V en $\vec{A}$ uitgedrukt in t en $\vec{r}$. Laat zien dat $\vec{A} = \vec{v}V$.

2 pnt (c) Geef aan hoe hieruit de $\vec{E}$ en $\vec{B}$ velden in S uitgerekend kunnen worden. (De berekening zelf hoef je niet te doen.)

3 pnt (d) Controleer dat de vier-potentiaal A^μ voldoet aan de Lorentz-ijk (Lorentz gauge).

Som 4 (*40 minuten; 13 punten totaal*)

Een vlakke golf met hoek-frequentie ω plant zich in vacuüm voort in de x-richting. Het elektrische veld is gepolariseerd in de y-richting met amplitude E_0:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{y}\ .$$

4 pnt (a) Geef de vergelijkingen van Maxwell (in vacuüm) in differentiële vorm. Laat zien dat $\vec{E}(x,y,z,t)$ aan alle vergelijkingen voldoet en vind het bijbehorende magnetische veld $\vec{B}(x,y,z,t)$. Schets de $\vec{E}$ en $\vec{B}$ velden in het coördinatensysteem (x,y,z).

2 pnt (b) Bereken de Poynting vector $\vec{S}$ en het gemiddelde ervan over een hele periode. Bereken daarmee de intensiteit $\vec{I}$.

4 pnt (c) Dezelfde golf wordt waargenomen vanuit een inertiaal-systeem S' dat in de x-richting beweegt met snelheid v ten opzichte van het oorspronkelijke systeem. Bereken de velden $\vec{E}'$ and $\vec{B}'$ in S' en druk ze uit in de coordinaten (ct', x', y', z') in S'. Leg uit (of leid af) dat $kx - \omega t = k'x' - \omega' t'$.

3 pnt (d) Bereken de frequentie ω', golflengte λ' en de snelheid van de golven in S'. Wat gebeurt met de frequentie, amplitude en intensiteit van de golf wanneer v de lichtsnelheid c benadert?

Lorentz transformatie van het elektrische veld:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}\ , \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}\ ; \end{aligned}$$

voor het magnetische veld, vervang $\vec{E} \to c\vec{B}$ en $\vec{B} \to -\vec{E}/c$;
$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(\nabla f)\cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\tau = \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$

ϵ_0	=	$8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$	(permittivity of free space)
μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$	(permeability of free space)
c	=	$3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{m}/s$	(speed of light)
e	=	$1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$	(charge of the electron)
m	=	$9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$	(mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$